Explizite Darstellung einer Potenzfolge

Satz: Die explizite Darstellung $(y_n)_{n\in\mathrm{N}_0}$ einer Folge $(x_n)_{n\in\mathrm{N}_0}$, die rekursiv durch

$$\begin{aligned} x_0 &:= \text{gegeben} \\ x_{n+1} &:= b \cdot x_n + c, \quad n \in \mathrm{N}_0 \end{aligned}$$

definiert ist, lautet

$$y_n := \left(x_0 + \frac{c}{b-1}\right) \cdot b^n - \frac{c}{b-1}, \quad n \in \mathrm{N}_0.$$

Induktionsbeweis:

1. Verankerung:

$$y_0 = \left(x_0 + \frac{c}{b-1}\right) \cdot 1 - \frac{c}{b-1} = x_0$$

2. Schritt: Für $n \in \mathrm{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= b \cdot y_n + c \\ &= \left(x_0 + \frac{c}{b-1}\right) \cdot b^{n+1} - \frac{bc}{b-1} + c \\ &= \left(x_0 + \frac{c}{b-1}\right) \cdot b^{n+1} - \frac{bc - bc + c}{b-1} \\ &= \left(x_0 + \frac{c}{b-1}\right) \cdot b^{n+1} - \frac{c}{b-1} \\ &= y_{n+1}. \end{aligned}$$

Beispiel: Für $x_0 = 12$, $b = \frac{3}{2}$ und $c = 2$ erhält man

$$y_n := \left(12 + \frac{2}{\frac{3}{2} - 1}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{2}{\frac{1}{2}} = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 4, \quad n \in \mathrm{N}_0.$$

Dies liefert die Werte $y_0 = 16 - 4 = 12$, $y_1 = 24 - 4 = 20$, $y_2 = 36 - 4 = 32$, $y_3 = 54 - 4 = 50$, usw.