Der Binomialkoeffizient

Der sog. *Binomialkoeffizient* ist für $k \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,,$$

wobei die sog. *Fakultät* für $j \in \mathbb{N}_0$ wiederum definiert ist durch

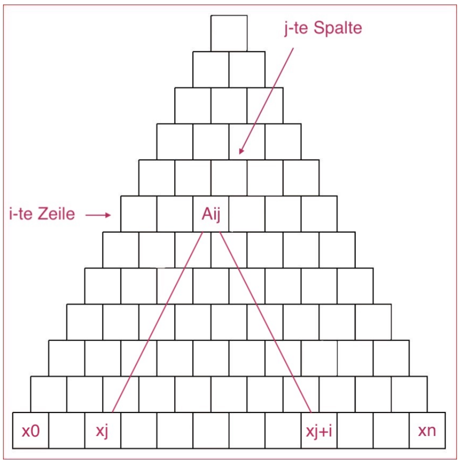
$$j! := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad j = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (j-1) \cdot j, & \text{falls} \quad j \geq 1 \end{cases}$$

Tabelle der ersten elf Fakultäten

j	j!
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800

Anwendung auf die Zahlenpyramide

Mit Hilfe des Binomialkoeffizienten kann man eine Formel angeben, die die Abhängigkeit der Zahl A_{ij}, die in der i-ten Zeile ($i = 0, 1, \ldots, n$) und j-ten Spalte ($j = 0, 1, \ldots, n$) der Zahlenpyramide steht, von den Grundzahlen x_0, x_1, $x_2, \ldots,$ x_n mathematisch beschreibt.

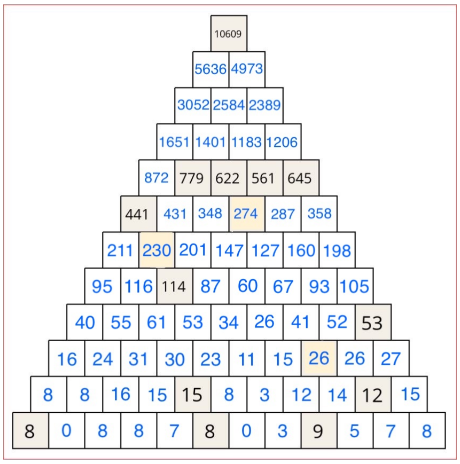


Und zwar gilt

$$A_{ij} = \sum_{k=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} x_{j+k}.$$

Sie ist also die gewichtete Summe der Grundzahlen von x_j bis x_{i+j}, wobei die Gewichte durch die Binomialkoeffizienten gegeben sind.
Mit dieser Formel kann man für jeden der gegebenen Einträge der Zahlenpyramide eine Gleichung aufstellen und dieses System dann nach den Grundzahlen auflösen.

Beispiel:



Hier ist $n = 11$ und die Formel liefert die 13 Bedingungen:

$$\begin{aligned}
A_{0,0} &= x_0 &&= 8\\
A_{0,5} &= x_5 &&= 8\\
A_{0,8} &= x_8 &&= 9\\
A_{1,4} &= x_4 + x_5 &&= 15\\
A_{1,9} &= x_9 + x_{10} &&= 12\\
A_{3,8} &= x_8 + 3x_9 + 3x_{10} + x_{11} &&= 53\\
A_{4,2} &= x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 + x_6 &&= 114\\
A_{6,0} &= x_0 + 6x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 6x_5 + x_6 &&= 441\\
A_{7,1} &= x_1 + 7x_2 + 21x_3 + 35x_4 + 35x_5 + 21x_6 + 7x_7 + x_8 &&= 779\\
A_{7,2} &= x_2 + 7x_3 + 21x_4 + 35x_5 + 35x_6 + 21x_7 + 7x_8 + x_9 &&= 622\\
A_{7,3} &= x_3 + 7x_4 + 21x_5 + 35x_6 + 35x_7 + 21x_8 + 7x_9 + x_{10} &&= 561\\
A_{7,4} &= x_4 + 7x_5 + 21x_6 + 35x_7 + 35x_8 + 21x_9 + 7x_{10} + x_{11} &&= 645\\
A_{11,0} &= x_0 + 11x_1 + 55x_2 + 165x_3 + 330x_4 + 462x_5 &&\\
&\quad +462x_6 + 330x_7 + 165x_8 + 55x_9 + 11x_{10} + x_{11} &&= 10609
\end{aligned}$$

Das ist im Grunde eine Bedingung zu viel, aber weil das Problem natürlich „gutartig“ gestellt ist, besitzt dieses Gleichungssystem — in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1\\
0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1\\
1 & 11 & 55 & 165 & 330 & 462 & 462 & 330 & 165 & 55 & 11 & 1
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8\\ x_9\\ x_{10}\\ x_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\\ 8\\ 9\\ 15\\ 12\\ 53\\ 114\\ 441\\ 779\\ 622\\ 561\\ 645\\ 10609 \end{pmatrix}$$

— genau eine Lösung, nämlich $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{11}) = (8, 0, 8, 8, 7, 8, 0, 3, 9, 5, 7, 8)$. Damit lässt sich der Rest der Pyramide aber unmittelbar auffüllen.