Schneeräumaufgabe

Aufgabe: Ein Bergwanderer ist allein auf einer Hütte und muss dringend zum Materialhaus nebenan, um Streichhölzchen für die Feuerstelle zu holen. Das Problem ist, es schneit fortwährend und es gibt keinen Aufschub. Um acht Uhr abends geht der Wanderer mit der Schaufel in der Hand in die dunkle Nacht hinaus und kämpft gegen die Naturgewalten. Da der Schneefall nicht aufhört, sondern unverändert anhält, nimmt die Schneehöhe mit fortschreitender Zeit konstant (linear) zu und die Geschwindigkeit, mit der sich der Mann seinem Ziel nähert, nimmt umgekehrt proportional zur Schneehöhe ab. Während der ersten halben Stunde schafft er 90 Meter Richtung Materialhaus, für die restlichen 30 Meter braucht er eine weitere halbe Stunde. Wann haben die Schneefälle eingesetzt?

PS. Dass der Rückweg auf Grund des starken Schneefalls vermutlich nicht mehr bewältigt werden kann, hat sich der Wanderer offenbar nicht überlegt.

Lösung: Bezeichnet t wie üblich die Zeit, m die zeitlich konstante Wachstumsrate der Schneehöhe und h_0 den Schneestand zu Beginn der Räumarbeiten (bei $t = 0$), so gilt für den Schneestand

$$h(t) = mt + h_0.$$

Mit einer Konstanten c gilt auf Grund der Annahme, dass sich die Fortschrittsgeschwindigkeit $\dot{s}$ der Räumarbeiten umgekehrt zur Schneehöhe verhält,

$$\dot{s}(t) = \frac{c}{h(t)} = \frac{c}{mt + h_0}.$$

Durch Integration erhält man die Ortsfunktion des Wanderers zu

$$s(t) = \frac{c}{m} \ln(mt + h_0) + s_0$$

mit der Integrationskonstanten s_0. Normieren wir $s(0) = 0$, so gilt $s_0 = -\frac{c}{m} \ln(h_0)$ und für die Ortsfunktion

$$s(t) = \frac{c}{m} \ln\left(1 + \frac{m}{h_0} t\right).$$

Die Bedingungen $s(30) = 90$ und $s(60) = 120$ liefern das System

$$\begin{aligned} \frac{c}{m} \ln\left(1 + \frac{30m}{h_0}\right) &= 90 \\ \frac{c}{m} \ln\left(1 + \frac{60m}{h_0}\right) &= 120, \end{aligned}$$

welches die Gleichung

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{30m}{h_0}\right)^{120} &= \left(1 + \frac{60m}{h_0}\right)^{90} \\ \Leftrightarrow \quad (1 + x)^4 &= (1 + 2x)^3 \end{aligned}$$

mit der Substitution $x := \frac{30m}{h_0}$ impliziert. Dies führt (neben der praktisch irrelevanten Lösung $x = 0$) auf die kubische Gleichung

$$x^3 - 4x^2 - 6x - 2 = 0.$$

Die Transformation $x = z + \frac{4}{3}$ liefert die reduzierte Form

$$z^3 - \frac{34}{3} z - \frac{398}{27} = 0.$$

Die Diskriminante hiervon ist $D = \frac{11}{27}$ und führt auf die rein kubische Gleichung

$$u^3 = \frac{199}{27} + \frac{\sqrt{33}}{9} \approx 8.0087.$$

Die dritte Wurzel hiervon ist $u \approx 2.0007$, woraus $v = 1.8882$ folgt. Die reelle Lösung (die andern beiden sind wegen $D > 0$ konjugiert komplex) lautet somit $z = u + v = 3.8889$ und nach der Rücktransformation $x = z + \frac{4}{3} = 5.2223$.

Die Rücksubstitution liefert $m = \frac{xh_0}{30} = 0.17408h_0$, womit die Schneestandfunktion

$$h(t) = (0.17408t + 1)\, h_0$$

nur noch von t und h_0 abhängt und die Nullstelle $t = -5.7446$ (Minuten) sogar unabhängig von h_0 ist. Das heißt, die Schneefälle haben um 19:54:15 Uhr eingesetzt.