Eine Extremwertaufgabe

Pythagoras impliziert

$$s(x) = \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{(6-x)^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 12x + 45}.$$

Ableiten liefert

$$s'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{x-6}{\sqrt{x^2-12x+45}}.$$

Die Nullstelle(n) bekommt man dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} &= -\frac{x-6}{\sqrt{x^2-12x+45}} \quad \Big|^2 \\
x^2\left(x^2-12x+45\right) &= \left(x^2-12x+36\right)\left(x^2+4\right) \\
x^4-12x^3+45x^2 &= x^4-12x^3+40x^2-48x+144 \\
5x^2+48x-144 &= 0 \\
(5x-12)(x+12) &= 0 \\
x = 2.4 \quad &\text{oder} \quad x = -12
\end{aligned}$$

Einzig realistischer Lösungskandidat ist mithin $x = 2.4$, und eingesetzt in die Zielfunktion erhält man

$$y_1 + y_2 = s(2.4) = \sqrt{5.76+4} + \sqrt{5.76-28.8+45} = \frac{2}{5}\sqrt{61} + \frac{3}{5}\sqrt{61} = \sqrt{61} \approx 7.8102.$$

(Deutlich) einfacher geht das aber, wenn man z. B. den Punkt B an der Tankstellengeraden „nach unten“ spiegelt ($\rightarrow$ B’) und dann argumentiert, dass die Verbindung von A nach B genau dann am kürzesten ist, wenn sie von A nach B’ am kürzesten ist. Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn der Streckenzug von A nach B’ gerade ist.

Dann hat man aber folgende simple geometrische Situation vorliegen:

$$y_1 + y_2 = \sqrt{6^2 + (2+3)^2} = \sqrt{61} \approx 7.8102.$$

$x = 2.4$ wird in diesem Fall gar nicht benötigt, kann aber ebenso einfach berechnet werden.

Die Aufgabe zeigt, dass man bei Extremwertaufgaben erst mal schauen sollte, ob es nicht einen einfachen elementaren Lösungsweg gibt, der ohne Analysis auskommt.